На правах рукописи

Чупраков Дмитрий Вячеславович

КОНГРУЭНЦИИ НА ПОЛУКОЛЬЦАХ И ПОЛУПОЛЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре высшей математики физико-математического факультета Вятского государственного гуманитарного университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Вечтомов Евгений Михайлович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Кожухов Игорь Борисович**; кандидит физико-математических наук, доцент **Тронин Сергей Николаевич**
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита состоится «___»____________ 2009 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, конференц-зал библиотеки им. Н. И. Лобачевского КГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

Автореферат разослан «___»____________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент А. И. ЕНИКЕЕВ

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследования, проведенные в диссертации, посвящены активно развивающемуся разделу функциональной алгебры — полукольцам непрерывных функций. Объектом исследования являются конгруэнции на полукольцах и полуполях непрерывных числовых функций над топологическими пространствами.

Полукольца и полуполя непрерывных функций служат модельным примером общей теории полуколец и полутел, а также находят применение при исследовании пучковых представлений абстрактных полуколец и полутел.[1] В свою очередь теория полуколец применяется в топологии, дискретной математике, компьютерной алгебре, и других разделах математики.[2,2] Отдельно следует упомянуть идемпотентный анализ.[3]

Полукольца непрерывных функций появились в рамках классической теории колец непрерывных функций, которая зародилась в работах М. Стоуна[4]. 1937 г., И.М. Гельфанда и А.Н. Колмогорова[5] 1939 г., Хьюитта[6] 1948 г., и окончательно оформилась после выхода в свет в 1960 г. замечательной книги Гилмана и Джерисона.[7] Главным объектом теории колец непрерывных функций слу-

[1] Чермных, В. В. Функциональные представления полуколец и полумодулей : дис. ... док. физ.-матем. наук : 01.01.06: защищена 28. 06. 2007 / В. В. Чермных. — Киров : Вятский государственный гуманитарный университет, 2007. — 234 с.

[2] Golan, J. S. Semirings and their applications [Text] / J. S. Golan. — Kluwer Academic Publishers. Dordrecht-Boston-London, 1999. — 381 p.

[3] Маслов, В. П. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении [Текст] / В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов. — М. : Наука, 1994.

[4] Stone M. Applications of the theory of boolean rings to general topology [Text] / M. Stone // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — T. 41. — № 3. —P. 375–481.

[5] Гельфанд И. М. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах [Текст] / И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров // ДАН СССР. — Т. 22. — № 1. — С. 11–15.

[6] Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions [Text] / E. Hewitt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — T. 64. — № 1. — P. 45–99.

[7] Gillman L. Rings of continuous functions [Text] / L. Gillman, M. Jerison. — N.Y. : Springer-Verlag, 1976. —

жит кольцо $C(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций, заданных на произвольном (тихоновском) топологическом пространстве X, с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций.

Полукольцом[2] называется алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, такая, что $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S, \cdot, 1\rangle$ — моноид, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ для любого элемента $x \in S$ и $0 \neq 1$. Заметим, что определение полукольца впервые было дано Вандивером[8] в 1934 году. Коммутативное полукольцо, не являющееся кольцом, каждый элемент которого обратим, называется *полуполем с нулем.* Если из полуполя с нулем исключить нуль, то получим алгебраическую структуру, называемую *полуполем.*

Исследование полуколец непрерывных функций стало важным направлением развития и модификации теории колец $C(X)$.[9,10] Здесь выделяются два объекта: полукольцо $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных функций на произвольном топологическом пространстве X и полуполе $U(X)$ всех непрерывных положительных функций на X с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций. Заметим, что кольцо $C(X)$ служит кольцом разностей как полукольца $C^+(X)$, так и полуполя $U(X)$.

Полукольца $C^+(X)$ для компактов X фигурировали в качестве примера в работе Словиковского и Завадовского 1955 г.[11] Систематическое изучение

---

278 p.

[8]Vandiver, H. S. Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold [Text] / H. S. Vandiver // Bull. Amer. Math. Soc. — 1954. — V. 40. — P. 914–920.

[9]Artamonova, I. I. Semirings: sheaves and continuous functions [Text]/ I. I. Artamonova, V. V Chermnykh, A. V. Mikhalev, V. I. Varankina, E. M. Vechtomov // Proceedings of SPB conference. —Sankt-Peterburg. — 1999. — P. 23–58.

[10]Вечтомов, Е. М. Полукольца непрерывных отображений [Текст] / Е. М. Вечтомов // Вестник ВятГГУ. — 2004. — № 10. — С. 57–64.

[11]Slowikowski, W. A generalization of maximal ideals method of Stone and Gelfand [Text] / W. Slowikowski, A. Zawadowsci // Fund. Math. — 1955. —T. 42. —№ 2. — P. 215–231.

свойств полуколец непрерывных функций начато в работе В. И. Варанкиной, Е. М. Вечтомова и И. А. Семёновой 1998 года.[12] Полуполя $U(X)$ изучаются с 1995 г.[13]

Важным направлением в теории полуколец и полуполей непрерывных функций стало изучение конгруэнций на них. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций $C^+(X)$ на тихоновском пространстве X впервые упоминаются в статьях 1993 г.[14] и 1995 г.[15] В первой из них авторы показали, что пространство всех максимальных среди сократимых конгруэнций на $C^+(X)$ гомеоморфно стоун-чеховской компактификации пространства X. Во второй работе доказано, что пространство конгруэнций со стоуновской топологией на полукольце $C^+(X)$, фактор-полукольца по которым изоморфны полуполю $\mathbb{R}^+$ неотрицательных действительных чисел, гомеоморфно хьюиттовскому расширению пространства X.

В упомянутой выше статье Варанкиной, Вечтомова и Семёновой описана связь решётки конгруэнций полукольца $C^+(X)$ с решёткой идеалов кольца $C(X)$. Доказано, что из дистрибутивности любой из решёток $\mathrm{Con}\, C^+(X)$ или $\mathrm{Con}\, U(X)$ следует, что пространство X является F-пространством. Поставлен вопрос о справедливости обратной импликации. В случае решётки $\mathrm{Con}\, U(X)$ вопрос положительно решён Д. В. Широковым.[16] Нами доказано, что на любом

[12]Варанкина, В. И. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы,конгруэнции [Текст] / В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, И. А. Семенова // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4. — Вып. 2. — С. 493–510.

[13]Варанкина В. И. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций [Текст] / В. И. Варанкина // Фундам. и прикл. математика. — 1995. — Т. 1. — № 4. — С. 923–937.

[14]Acharyya, S. K. Hemirings, congruences and the Stone-Čech compactification [Text] /S. K. Acharyya, K. S. Chattopalhyay, G. G. Ray // Simon Stevin. — 1993. — T. 67. — P. 21–35.

[15]Acharyya, S. K. Hemirings, congruences and the Hewitt realcompactification [Text] /S. K. Acharyya, K. S. Chattopalhyay, G. G. Ray // Bull. Belg. Math. Soc. — 1995. — T. 2. — № 1. — P. 47–58.

[16]Широков, Д. В. Условия дистрибутивности решётки конгруэнций полуполя непрерывных положительных функций [Текст] / Д. В. Широков // Вестник ВятГГУ. — 2003. — № 8. — С. 137–140.

F-пространстве X решётка $\operatorname{Con} C^+(X)$ дистрибутивна.

И. А. Семёнова[17] даёт описание максимальных и предмаксимальных конгруэнций (аддитивно) сократимого полукольца $C^+(X)$, а также максимальных конгруэнций сократимого полуполя $U(X)$. В настоящей диссертации описаны максимальные и предмаксимальные конгруэнции (аддитивно) идемпотентного полукольца $C^\vee(X)$ и максимальные конгруэнции полуполя $U^\vee(X)$. М. Н. Подлевских[18] установлено, что конгруэнции на $S(X)$ — любом из полуколец $C^+(X)$, $C^\vee(X)$ или полуполей $U(X)$, $U^\vee(X)$ — с топологией поточечной сходимости суть отношения равенства ρ_A на всевозможных замкнутых множествах A пространства X.

В теории колец непрерывных функций важную роль играют F-пространства и P-пространства, введенные Гилманом и Хенриксоном в 1956 г.[19] и 1954 г.[20] соответственно. Имеются многочисленные характеризации F-пространств и P-пространств в терминах колец[7,21] и полуколец[12,22] непрерывных функций. В настоящей диссертации получены полукольцевые характеризации этих пространств в терминах конгруэнций полуколец непрерывных функций.

Цель работы. Дальнейшее исследование свойств конгруэнций и решёток

---

[17] Семенова, И. А. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 11. 01. 1999 / И. А. Семенова. — Киров : Вятский государственный педагогический университет, 1998. — 78 с.

[18] Подлевских, М. Н. Полукольца непрерывных функцией с топологией поточечной сходимости : дис. ... канд. физ.-матем. наук : 01. 01. 06: защищена 15.11.1999 / М. Н. Подлевских. — Киров : Вятский государственный педагогический университет, 1999. – 88 с.

[19] Gillman, L. Rings of continious functions in which every finitely generated ideal is principal [Text] / L. Gillman, M. Henriksen // Trans Amer. Math. Soc. — 1956. — T. 82. — № 2. — P. 366–391.

[20] Gillman, L Concerning rings of continious functions [Text] / L. Gillman, M. Henriksen // Trans Amer. Math. Soc. — 1954. —T. 77. —№ 2. — P. 340–362.

[21] Vechtomov, E. M. Rings of continuous functions with values in topological division ring [Text] / E. M. Vechtomov // J. Math. Sciences (USA). — 1996. —V. 78. — № 6. — P. 702–753.

[22] Широков, Д. В. Идеалы в полукольцах непрерывных функций: дис. ... канд. физ.-матем. наук : 01.01.06: защищена 19. 12. 2005 / Д. В. Широков. — Киров : Вятский государственный гуманитарный университет, 2005. — 83 с.

конгруэнций полуколец и полуполей непрерывных функций.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Установлена продолжаемость любой конгруэнции полуполей $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$ до конгруэнции полуколец $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$ соответственно (глава II).

2. Доказано наличие псевдодополнений всех конгруэнции на полукольцах $C^{+}(X)$, $C^{\vee}(X)$ и полуполях $U(X)$, $U^{\vee}(X)$ (§ 5).

3. Получены критерии дистрибутивности решётки конгруэнций полукольца непрерывных неотрицательных функций (§ 8).

4. Найдены критерии совпадения решёток конгруэнций сократимого и идемпотентного полуколец (полуполей) непрерывных функций (§ 8, § 9).

5. Установлены новые полукольцевые характеризации F-пространств, P-пространств, конечных дискретных и других пространств (глава IV).

Методы исследования. В работе применяются методы и результаты теории колец и полуколец непрерывных функций, теории полуколец, теории решёток, универсальной алгебры и общей топологии. Для исследования решёток конгруэнций полуполей непрерывных функций эффективен метод главных конгруэнций[23]. В ряде случаев можно использовать метод продолжения конгруэнций, разработанный во второй главе диссертации. В десятом параграфе применяется метод дополнений и псевдодополнений, адаптированный к решёткам конгруэнций в пятом параграфе. Также используется комбинированный метод, сочета-

[23]Семенова, И. А. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций: дис. ...канд. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 11. 01. 1999 / И. А. Семенова. — Киров : Вятский государственный педагогический университет, 1998. — 78 с.

ющий метод главных конгруэнций, свойства нуль-множеств и конуль-множеств функций и оригинальные рассуждения.

Теоретическое и прикладное значение. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использовать при дальнейших исследованиях в теории полуколец непрерывных функций. Кроме того, они могут найти свое применение в качестве материала для специальных курсов в высших учебных заведениях.

Апробация. Результаты диссертационной работы докладывались на Международной научной конференции «Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики» в Тамбовском государственном университете им. Державина в 2008 году, на Шестой молодежной научной школе-конференции в Казани в 2007 году, на научных конференциях Вятского государственного гуманитарного университета в 2006–2009 годах, регулярно на научном алгебраическом семинаре г. Кирова (руководители семинара доктора физ.-мат. наук профессора Е. М. Вечтомов и В. В. Чермных).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ (список публикаций приведен в конце автореферата), пять из которых в соавторстве с Е. М. Вечтомовым.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из оглавления, введения, четырех глав, разбитых на 10 параграфов, списка литературы (64 наименования) и предметного указателя. Общий объем диссертации — 106 страниц.

Обзор содержания работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, дан исторический очерк исследований, проведенных для полуколец и полуполей непрерывных функций, сформулированы задачи исследования, приведена аннотация основных результатов диссертационной работы.

Первая глава посвящена обзору основных понятий теории полуколец. В ней приведены известные утверждения теории полуколец непрерывных функций, необходимые для дальнейшего изложения.

В первом параграфе сформулированы определения основных понятий и известные факты общей теории полуколец и даны примеры универсальных конгруэнций полуколец.

Предложение 1.2 позволяет исследование решёток конгруэнций полутел заменить исследованием соответствующей решётки ядер.

Второй параграф содержит необходитые известные утверждения теории полуколец непрерывных функций. Также в нём рассмотрены новые простейшие свойства ядер полуполей непрерывных функций. Так, в предложении 2.2 установлено, что решётка конгруэнций $\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$ является подрешёткой решётки конгруэнций $\operatorname{Con} U(X)$.

Главной конгруэнцией ρ на полуполе U, порожденной парой (u, v), называется наименьшая конгруэнция на U с условием $u \,\rho\, v$. Она однозначно задается парой $(uv^{-1}, 1)$. Ядро главной конгруэнции на полуполе $U(X)$ $(U^{\vee}(X))$, порожденной парой $(\varphi, 1)$, будем называть *главным ядром* и обозначим (φ) $((\varphi)^{\vee})$.

Приведено описание главных ядер полуполя $U^{\vee}(X)$:

Предложение 2.4. *Главные ядра* $\ker^{\vee}(\varphi)$ *на полуполе* $U^{\vee}(X)$ *и только они имеют вид:*

$$\left\{v \in U^{\vee}(X) \mid (\exists k \in \mathbb{N})\, (\varphi \wedge \varphi^{-1})^k \leqslant v \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^k)\right\}.$$

Введен символ $\operatorname{Ed} f$ для обозначения множества $\{x \mid f(x) = 1\} = Z(f-1)$ и указаны его свойства.

Предложение 2.6. *Для произвольной функции* $\varphi \in U(X)$ *если множество* $\operatorname{Ed}\varphi$ *является открыто-замкнутым, то* $(\varphi) = (\varphi \vee \varphi^{-1})$.

Лемма 2.2. *Для любых функций* $u, v \in U(X)$ $(u) \cap (v) = \{1\}$ *тогда и* *только тогда, когда* $\mathrm{Ed}\, u \cup \mathrm{Ed}\, v = X$.

Также во втором параграфе определяются такие важные свойства топологических пространств как тихоновость и хьюиттовость.

Топологическое пространство X называется *тихоновским* (*хьюиттовским*) если оно гомеоморфно произвольному подпространству (замкнутому подпространству) некоторой тихоновской степени $\mathbb{R}$. Известно[7] , что для каждого топологического пространства X существует тихоновское пространство τX такое, что имеют место изоморфизмы $C(X) \cong C(\tau X)$, $S(X) \cong S(\tau X)$. Тихоновость пространства X означает, что $X = \tau X$. Каждое тихоновское пространство X обладает хьюиттовским расширением νX, однозначно (с точностью до гомеоморфизма над X) характеризуемым следующими условиями: νX — хьюиттовское пространство, X — плотное подпространство в νX и все функции из $C(X)$ продолжаются (единственным образом) до функций из $C(\nu X)$. Имеют место полукольцевые изоморфизмы $C(\nu X) \cong C(X)$ и $S(\nu X) \cong S(X)$. Поэтому при изучении абстрактных свойств полуколец непрерывных функций пространство X можно считать тихоновским и даже хьюиттовским. Мы будем явно указывать, когда утверждение доказано только для тихоновских пространств.

Топологическое пространство X называется F-*пространством*, если в кольце $C(X)$ все конечно порождённые идеалы — главные. Пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда множества $\mathrm{neg}\, f = \{x \in X \mid f(x) < 0\}$ и $\mathrm{pos}\, f = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ для любой функции $f \in C(X)$ функционально отделимы. Топологическое пространство X называется P-*пространством*, если кольцо $C(X)$ регулярно по фон Нейману, то есть для любой функции $f \in C(X)$ существует такая функция $g \in C(X)$, что $fgf = f$. Это равносильно тому, что все нуль-множества на X открыто-замкнуты.

Во **второй главе** решается задача продолжения конгруэнций полуполя

$U^{\vee}(X)$ (параграф 3) и полуполя $U(X)$ (параграф 4) до конгруэнций соответствующих полуколец непрерывных функций.

Для каждого ядра $K \in \operatorname{Con} U^{\vee}(X)$ на полукольце $C^{\vee}(X)$ введены отношение $\vee_K$, заданное условием:

$f \vee_K g$ означает выполнение условий

$$f = f_1 \vee ... \vee f_n, \quad g = g_1 \vee ... \vee g_m, \quad \bigvee_{i=1}^{n} f_i u_i = \bigvee_{i=1}^{m} g_i v_i.$$

для некоторых $f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m \in C^{\vee}(X)$ и $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m \in K$,

и отношение ρ_K, определенное следующим образом:

$$f \, \rho_K \, g \Longleftrightarrow gk \leqslant f \leqslant gk' \text{ для некоторых } k, k' \in K.$$

Установлено, что эти отношения являются совпадающими конгруэнциями (предложение 3.1), склеивающими ядро K (предложения 3.1 и лемма 3.2).

Предложение 3.1. *Для каждого ядра K полуполя $U^{\vee}(X)$ отношение $\vee_K$ является наименьшей конгруэнцией на полукольце $C^{\vee}(X)$, склеивающей ядро K: $K \subseteq \ker \vee_K$.*

Теорема 3.1. *Для произвольной конгруэнции ρ на полуполе $U^{\vee}(X)$ с ядром K конгруэнция $\vee_K$ полукольца $C^{\vee}(X)$ является продолжением ρ на полукольцо $C^{\vee}(X)$, причем $\ker \vee_K = K$.*

Предложение 3.2. *Для любого $\vee$-ядра K конгруэнции $\vee_K$ и ρ_K полукольца $C^{\vee}(X)$ совпадают.*

Для каждого ядра $K \in \operatorname{Con} U(X)$ на полукольце $C^{+}(X)$ определяется отношение $\sim_K$, заданное условием:

$f \sim_K g$ означает выполнение условий

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i, \quad g = \sum_{j=1}^{n} g_j, \quad \sum_{i=1}^{n} f_i u_i = \sum_{j=1}^{m} g_j v_j.$$

для некоторых $f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m \in C^{+}(X)$ и $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_m \in K$.

Предложение 4.1. *Пусть K — некоторое ядро полуполя $U(X)$. Тогда отношение $\sim_K$ является наименьшей конгруэнцией на полукольце $C^+(X)$, склеивающей ядро K.*

Теорема 4.1. *Любая конгруэнция $\rho \in \operatorname{Con} U(X)$ продолжается на полукольцо $C^+(X)$ до конгруэнции $\sim_K$ для $K = [1]_\rho$, при этом $[1]_{\sim_K} = K$.*

Третья глава посвящена исследованию свойств решёток конгруэнций полуколец и полуполей непрерывных функций.

В пятом параграфе решается вопрос описания дополнений и псевдодополнений в решётках конгруэнций полуколец $C^+(X)$, $C^\vee(X)$ и полуполей $U(X)$ и $U^\vee(X)$.

Псевдодополнением элемента a решётки $\langle L, \vee, \wedge, 0\rangle$ называется наибольший элемент $a^* \in L$, удовлетворяющий условию $a \wedge a^* = 0$. *Дополнением* элемента a решётки $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ называется элемент $a' \in L$, удовлетворяющий условиям $a \wedge a' = 0$ и $a \vee a' = 1$.

Теорема 5.1. *Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Тогда для полукольца или полуполя $S(X)$ любая конгруэнциия ρ решётки $\operatorname{Con} S(X)$ имеет псевдодополнение ρ_A для некоторого единственного канонически замкнутого подмножества A пространства X. Обратно, для каждого канонически замкнутого множества A в X конгруэнция ρ_A является псевдодополнением некоторой конгруэнции на $S(X)$.*

Следствие 5.1. *Для любого топологического пространства X решётки $\operatorname{Con} U(X)$, $\operatorname{Con} U^\vee(X)$, $\operatorname{Con} C^+(X)$, $\operatorname{Con} C^\vee(X)$ суть решётки с псевдодополнениями.*

Теорема 5.2. *Бинарное отношение ρ на полукольце или полуполе $S(X)$ является дополняемой конгруэнцией тогда и только тогда, когда $\rho = \rho_A$ для некоторого единственного открыто-замкнутого подмножества A топологического пространства X. Любая дополняемая конгруэнция на $S(X)$ имеет* *единственное дополнение.*

В шестом параграфе установлены два результата о существовании ретрактов для полуколец непрерывных функций.

Для каждого идеала I кольца $C(X)$ на полуполе $U(X)$ задается *идеальная* конгруэнция $\gamma(I)$:

$$f\gamma(I)g \Leftrightarrow f - g \in I, \text{ для любых } f, g \in U(X).$$

Аналогично определяются идеальные конгруэнции $\gamma(I)$ полукольца $C^+(X)$.

Предложение 6.1. *Отображение* $\gamma\colon \operatorname{Id} C(X) \to \operatorname{Con} U(X)$ *является гомоморфизмом.*

Решётка M называется *ретрактом* решётки N, если существуют такие гомоморфизмы $\pi\colon N \to M$ и $\chi\colon M \to N$, что $\pi \circ \chi = 1_M$ — тождественное отображние множества M.

Теорема 6.1. *Решётка идеалов* $\operatorname{Id} C(X)$ *является ретрактом решётки ядер* $\operatorname{Con} U(X)$.

Теорема 6.2. *Решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} U^\vee(X)$ *является ретрактом решётки конгруэнций* $\operatorname{Con} C^\vee(X)$.

В седьмом параграфе описаны максимальные конгруэнции полуполя $U^\vee(X)$. С помощью метода продолжений конгруэнций получено описание предмаксимальных конгруэнций полукольца $C^\vee(X)$.

Максимальной конгруэнцией на полукольце S называется коатом решётки $\operatorname{Con} S$. Конгруэнция ρ на полукольце S называется *предмаксимальной*, если любая превосходящая её конгруэнция на полукольце S является максимальной или единичной.

Теорема 7.1. *Максимальные конгруэнции на* $U^\vee(X)$ *— это в точности конгруэнции* $\gamma(M)$ *по всем* $\mathbb{R}$*-идеалам* M *кольца* $C(X)$.

Максимальные конгруэнции на произвольном полукольце S — это в точности двуклассовые бинарные отношения $\{P, S \backslash P\}$ где P — простой строгий идеал в S [1]2 .

Теорема 7.2. *Предмаксимальные конгруэнции на $C^{\vee}(X)$ — это в точности конгруэнции $\gamma(M)$ по всем $\mathbb{R}$-идеалам M кольца $C(X)$.*

Предложение 7.2. *Для произвольного топологического пространства X топологические пространства $\operatorname{Max} U^{\vee}(X)$ и $\operatorname{Pmax} C^{\vee}(X)$ гомеоморфны. Для любого тихоновского пространства X топологические пространства $\operatorname{Max} U^{\vee}(X)$, $\operatorname{Pmax} C^{\vee}(X)$ и νX гомеоморфны.*

Предложение 7.3. *Для произвольных хьюиттовских пространств X и Y равносильны следующие условия:*

1. $\operatorname{Con} U^{\vee}(X) \cong \operatorname{Con} U^{\vee}(Y)$;

2. $\operatorname{Con} C^{\vee}(X) \cong \operatorname{Con} C^{\vee}(Y)$;

3. $X \approx Y$.

Четвёртая глава посвящена исследованию свойств ядер полуполей $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$ непрерывных функций на X и их связей со свойствами топологического пространства X. В ней получены алгебраические характеризации F-пространств (параграф 8), P-пространств (параграф 9), базисно несвязных, экстремально несвязных, псевдокомпактных и конечных топологических пространств (параграф 10). Установлен критерий дистрибутивности решётки $\operatorname{Con} C^{+}(X)$ (следствие 8.2), условия совпадения множеств ядер $\operatorname{Con} U(X)$ и $\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$ (теорема 8.2) и множеств конгруэнций $\operatorname{Con} C^{+}(X)$ и $\operatorname{Con} C^{\vee}(X)$ (теорема 9.2).

Лемма 8.1. *Для любого пространства X равносильны условия:*

1. X — *F-пространство;*

2. $(\forall f, g, h \in C(X),\ f \leqslant h \leqslant g)\ (\exists \alpha \in C(X),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)\ [h = \alpha f + (1-\alpha) g]$;

3. *классы любой конгруэнции полукольца $C^+(X)$ выпуклы;*

4. *классы единицы всех конгруэнций полукольца $C^+(X)$ выпуклы;*

5. *все ядра полуполя $U(X)$ выпуклы.*

Теорема 8.2. *Для произвольного топологического пространства X эквивалентны следующие условия:*

1. *X является F-пространством;*

2. $\operatorname{Con} C^+(X) \subseteq \operatorname{Con} C^\vee(X)$*;*

3. $\operatorname{Con} U(X) \subseteq \operatorname{Con} U^\vee(X)$*;*

4. $\operatorname{Con} U(X) = \operatorname{Con} U^\vee(X)$*;*

Предложение 8.2. *Если топологическое пространство X является F-пространством, то решётка $\operatorname{Con} C^\vee(X)$ дистрибутивна.*

Теорема 8.3. *Решётка конгруэнций полукольца непрерывных функций $C^+(X)$ над F-пространством X является дистрибутивной.*

Следствие 8.2. *Решётка $\operatorname{Con} C^+(X)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда пространство X является F-пространством.*

Полукольцо или полуполе $S(X)$ называется *слабо риккартовым*, если для любых главных конгруэнций $\rho, \sigma \in \operatorname{Con} S(X)$ таких, что $\rho \cap \sigma = \mathbf{0}$, выполняется равенство $\rho^* \vee \sigma^* = \mathbf{1}$.

Теорема 8.4. *Для любого топологического пространства X следующие условия равносильны:*

1. *упорядоченное множество главных ядер полуполя $U(X)$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Con} U(X)$;*

2. *пересечение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром;*

3. *произведение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром;*

4. *полукольцо или полуполе $S(X)$ слабо риккартово;*

5. *X является F-пространством.*

Теорема 9.2. *Для произвольного топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

1. *X есть P-пространство;*

2. $\operatorname{Con} C^{+}(X) = \operatorname{Con} C^{\vee}(X)$;

3. $\operatorname{Con} C^{\vee}(X) \subseteq \operatorname{Con} C^{+}(X)$.

Параграф 10 посвящен характеризациям базисно несвязных, экстремально несвязных, псевдокомпактных и конечных топологических пространств

Топологическое пространство называется *базисно несвязным*, если внутренности всех его нуль-множеств замкнуты. Тихоновское пространство называется *экстремально несвязным*, если все его канонически замкнутые множества открыты.

Полукольцо или полуполе $S(X)$ называется *бэровским* (*риккартовым*), если псевдодополнение любой его конгруэнции (главной конгруэнции) дополняемо. дополняемо.

Предложение 10.1. *Для топологического пространства X полукольцо или полуполе $S(X)$ риккартово тогда и только тогда, когда X — базисно несвязное пространство.*

Предложение 10.2. *Для тихоновского пространства X полукольцо или полуполе $S(X)$ является бэровским тогда и только тогда, когда пространство X экстремально несвязно.*

Эти два предложения известны[24] для колец $C(X)$. Для полуколец $C^{+}(X)$ Д. В. Широковым[22] доказаны аналоги данных утверждений, который риккартовость и бэровость понимает в терминах идеалов полуколец.

Теорема 10.1. *Для тихоновского пространства X равносильны следующие условия:*

1. *все конгруэнции из $\mathrm{Con}\, U(X)$ ($\mathrm{Con}\, U^{\vee}(X)$) дополняемы;*
2. *все главные конгруэнции из $\mathrm{Con}\, U(X)$ ($\mathrm{Con}\, U^{\vee}(X)$) дополняемы;*
3. *все конгруэнции на $S(X)$ — главные;*
4. *пространство X конечно.*

Теорема 10.2. *Для любого топологического пространства эквивалентны следующие условия:*

1. *пространство X является псевдокомпактным;*
2. $(\varphi) = \ker \gamma((\varphi - 1)C(X))$ *для каждой функции* $\varphi \in U(X)$;
3. $U^{\vee}(X)$ *—полуполе с образующей;*
4. $U(X)$ *— полуполе с образующей;*
5. *любая собственная конгруэнция на $U(X)$ содержится в некоторой максимальной конгруэнции;*

[24] Вечтомов, Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы [Текст] / Е. М. Вечтомов. —М. : МПГУ, 1992. — 121 с.

6. *любая собственная конгруэнция на $U^{\vee}(X)$ содержится в некоторой максимальной $\vee$-конгруэнции.*

Предложение 10.3. *Произвольного пространство X конечно тогда и только тогда, когда $(u) = \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)$ для любой функции $u \in U(X)$.*

Автор искренне благодарен научному руководителю профессору Евгению Михайловичу Вечтомову за постановку задач, постоянно внимание к работе, ценные советы и комментарии, полезные обсуждения и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. Вечтомов Е. М. Решётки конгруэнций на полукольцах непрерывных функций [Текст] / Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков // Международная конференция «Алгебра и ее приложения», Красноярск, Сибирский федеральный Университет. — 2007. — С. 31–32 (0,125 п.л., соискателю принадлежит 50%).

2. Вечтомов Е. М. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций и F-пространства [Текст] / Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. — 2008. — № 8. — С. 15–26 (0,75 п.л., соискателю принадлежит 50%).

3. Вечтомов Е. М. Главные ядра полуполей непрерывных положительных функций [Текст] / Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков // Фундаментальная и прикладная математика, — 2008. — Т. 14. — Вып. 4. — С. 87–107 (1,3 п.л., соискателю принадлежит 50%).

4. Вечтомов Е. М. Псевдодополнения в решётке конгруэнций полуколец непрерывных функций [Текст] / Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Ин-

форматика. — 2009. — № 9. — С. 3–17 (0,88 п.л., соискателю принадлежит 50%).

5. Чупраков Д. В. О максимальных конгруэнциях на полукольцах непрерывных функций с идемпотентным сложением [Текст] / Д. В. Чупраков // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2008. — Вып. 10. — С. 99–110 (0,75 п.л.).

6. Чупраков Д. В. О ретрактах решёток полуколец непрерывных функций [Текст] / Д. В. Чупраков // Материалы VI молодежной школы-конференция «Лобачевские чтения» — Казань : КГУ, 2008. — С. 241–243 (0,19 п.л.).

7. Чупраков Д. В. О главных ядрах полуполей непрерывных функций [Текст] / Д. В. Чупраков // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики. Международная научная конференция. Тамбов — 2008. — С. 33–36 (0,25 п.л.).

8. Чупраков Д. В. О ядрах полуполей непрерывных функций [Текст] / Д. В. Чупраков // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша. Тезисы докладов — М. : Изд-во Механнико-математического факультета МГУ, 2008. — С. 251–253 (0,19 п.л.).

9. Чупраков Д. В. Дополнения конгруэнций в полукольцах непрерывных функций [Текст] / Д. В. Чупраков // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2009. — Вып. 11. — С. 122–127 (0,38 п.л.).

10. Чупраков Д. В. О псевдодополнениях конгруэнций полуколец непрерывных функций [Текст] / Д. В. Чупраков // Материалы IV Всероссийской

научно-методической конференции «Проблемы современного математического образования в вузах и школах России» — Киров : ВятГГУ, 2009. — С. 73 (0,063 п.л.).

11. Chuprakov, D. V. About distributive property of lattices of semirings of continuous funcnions [Text] / D. V. Chuprakov //7-th International Algebraic Conference in Ukraine: abstracts of talks (18-23 August, 2009, Kharkov)/ ed. G.N. Zholtkevich. — Kiev, 2009. — P. 38 (0,06 п.л.).

Статьи в журналах, рекомендуемых ВАК

12. Вечтомов Е. М. О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций [Текст] / Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков // Математические заметки. — 2009. — Т. 85 — Вып. 6. — С. 803–816 (1,2 п.л., соискателю принадлежит 50%).

13. Чупраков Д. В. Условия дистрибутивности решёток конгруэнций полуколец непрерывных функций [Текст] / Д. В. Чупраков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механника. Компьютерные науки. — 2009. — № 3. — С. 128–134 (0,66 п.л.).